

弾性波伝播有限要素解析における要素分割選定方法の考案

A Proposal for a Determination Method of Element Division on an Analytical Model for Finite Element Elastic Waves Propagation Analysis

石田 仁志 (Hitoshi Ishida)*¹, 飯井 俊行 (Toshiyuki Meshii)*²

要約 弾性波の伝播現象の有限要素解析を行う解析モデルに対して最適な要素分割を選定する手法を考案した。この手法は、次のような特徴を有する。(1) 要素分割により変化する解析モデル全体のひずみエネルギーに着目し、その収束性に基づいて要素分割を選定する。(2) 時間とともに変化する加振入力変位のうち、離散化した時間ステップにおいて最大に変化する変位とこれにより生じる慣性力を境界条件として入力する静的解析(時間1ステップのみの動的解析に相当)を行う。時間1ステップの間の変位と慣性力が衝撃的に変化するという特徴に着目したことからIM (Impact Meshing) 法と名づけた。

3次元弾性体における超音波伝播問題を例にとり、IM法によって選定した要素分割された解析モデルを使っても、有限要素解析による解が収束することを示した。さらに、時間100ステップの解析の場合、従来の有限要素解析の解の収束判定によるという従来の要素分割選定方法に比べて、IM法では要素分割選定のための計算時間が約1/6に削減されることも示した。

キーワード 弾性波, 音波, 有限要素解析, 要素寸法, ひずみエネルギー

Abstract This study proposes an element size selection method named the "Impact-Meshing (IM) method" for a finite element waves propagation analysis model, which is characterized by (1) determination of element division of the model with strain energy in the whole model, (2) static analysis (dynamic analysis in a single time step) with boundary conditions which gives a maximum change of displacement in the time increment and inertial (impact) force caused by the displacement change.

In this paper, an example of application of the IM method to 3D ultrasonic wave propagation problem in an elastic solid is described. These examples showed an analysis result with a model determined by the IM method was convergence and calculation time for determination of element subdivision was reduced to about 1/6 by the IM Method which did not need determination of element subdivision by a dynamic transient analysis with 100 time steps.

Keywords elastic waves, acoustic waves, finite element analysis, element size, strain energy

1. はじめに

鋼材内の超音波や地盤内の地震波などの伝播現象の解明のために、弾性波伝播解析が行われ、その手法の一つとして、有限要素解析が用いられる。有限要素解析においては、適切な解を得ることだけでなく、計算効率の点からも、要素寸法と時間増分の選定が重要である。

しかし、解くべき弾性波伝播に係る方程式が同じであるにもかかわらず、要素寸法と時間増分の選定方法に必ずしも統一されたものはなく、対象とする

問題や求める解の扱いに応じて要素寸法と時間増分が個別に選定されたり、または同様の先例が適用されたりしていることが多い。

すなわち、時間増分については、劉⁽¹⁾による入射波形を滑らかに表現するために入力波の周期の分割数による選定方法、および大槻⁽²⁾、Jaleel⁽³⁾、伊藤⁽⁴⁾、林⁽⁵⁾、Ju⁽⁶⁾、Zhang⁽⁷⁾らによる弾性波の伝播速度に基づく(要素寸法を伝播する時間による)選定方法がよく使用されている。

要素寸法については、Harumi⁽⁸⁾、三木⁽⁹⁾、劉⁽¹⁾、Guan⁽¹⁰⁾、大槻⁽²⁾らは、入力波の波形を滑らかに表

* 1 (株)原子力安全システム研究所 技術システム研究所

* 2 福井大学大学院工学研究科

現できるような波長の分割数によって選定している。一方, Galdos⁽¹¹⁾, Moser⁽¹²⁾, Mirkhani⁽¹³⁾, 吉川⁽¹⁴⁾, Nair⁽¹⁵⁾らは, 要素細分化に伴って変化する解析結果の収束によって選定している。前者の選定基準は定性的であり, 後者は適切な解を得ることにおいて有効であると考えられるが, いつの時刻でどのパラメータの収束を見ればよいのかが, 必ずしも明確に示されていない。

先例のある解析対象を扱うのであれば, その解析例を参考として時間増分や要素寸法を選定すれば実用上問題はないと考えられるが, これまでに実績のない解析対象に対し弾性波伝播有限要素解析を行う場合にも適用できる, 汎用的な時間増分および要素寸法選定方法があれば, 実用上有益であると考えられる。

そこで, 本研究では, 時間増分がすでに選定されているとの前提の下で, 対象とする問題によらない, 統一的, かつ判断根拠が明確であるという意味においてより合理的な要素分割選定法を提案する。以下, 提案する方法の着眼点と手順を示し, 弾性波伝播解析例によってその有用性を示す。

2. 要素分割選定方法

2.1 着眼点

正弦波状に変化する変位を入力し, 弾性波として伝播させるという動的解析問題について考える。図1(1)のように時々刻々連続的に変位が変化する正弦波は, 時刻歴変化を扱う有限要素解析においては, 変位の変化を図1(2)のように時間増分 Δt により離散化し, ステップ状に変化する変位として入力される。このステップ状に変化する変位 Δu_i によって速度が, さらにその速度とそれ以前の時刻の速度との変化によって加速度が生じ, その結果図1(3)のように慣性力 F_i が生じる。したがって, 時間ステップごとに離散化された動的解析問題は, その時間1ステップにおける変位変化および慣性力が境界条件として入力される静的解析問題と同等であり, 図1(4)のように, 動的解析問題は, 1コマずつの静的解析問題を連ねたものに置き換えられる。

このことから, 弾性波伝播という動的解析問題における要素分割の選定は, 各時間ステップにおける静的解析問題に対する適切な要素分割を選ぶ問題に帰着できると考えられる。そして, この静的解析問

題に対し解の収束を判定するパラメータとして, 入力された変位と慣性力から求められ, 解析対象領域全体を代表する変化量, すなわち解析モデル全体に蓄えられるひずみエネルギーを考えることとする。

ここで, 与えられた Δt に対して, 変位の絶対値が最大に変化する時刻 $t=n\Delta t \sim (n+1)\Delta t$ の間の変位ベクトル変化 $\Delta \mathbf{u}_{\text{impact}}$ を特定し, この $\Delta \mathbf{u}_{\text{impact}}$ がステップ状に与えられる結果発生する慣性力 $\mathbf{F}_{\text{impact}}$ を境界条件として与えることにする。絶対値が最大に変化する時刻の変位変化によって蓄えられるひずみエネルギーが収束すれば, 最大に変化する変位絶対値以下の他の各時刻においては, ひずみエネルギーは当然収束すると考えられる。 $\Delta \mathbf{u}_{\text{impact}}$ という変位入力とこれによって衝撃的に発生する慣性力 $\mathbf{F}_{\text{impact}}$ とを解析モデルに加えることによって, 解析モデル全体に蓄えられるひずみエネルギーを評価し, その収束性をもとに要素分割を選定する方法であることから, この方法をIM (Impact Meshing) 法と呼ぶこととする。

2.2 要素分割選定手順

図2に, 要素分割選定の手順を示す。具体的な手順は以下のとおりである。なお, IM法では, 時間増分は既に与えられていることを前提とする。

- Step1 変位の絶対値が最大に変化する時刻 $t=n\Delta t \sim (n+1)\Delta t$ の間の変位ベクトルの変化 $\Delta \mathbf{u}_{\text{impact}}$ を選定し, これを解析モデルに与える変位とする。
- Step2 $\Delta \mathbf{u}_{\text{impact}}$ とこれにより生じる慣性力 $\mathbf{F}_{\text{impact}}$ が, 解析モデルに与えられる力となる。このとき, $\mathbf{F}_{\text{impact}}$ はStep3において動的解析方法によって慣性力として扱うことが可能である。
- Step3 解析領域をモデル化し, 要素分割する。
- Step4 境界条件は, 実際に解くべき時刻歴解析問題における加振変位 $\mathbf{u}(t)$ を $\Delta \mathbf{u}_{\text{impact}}$ に置き換える他は, 実際の問題と同一とする。静止状態を初期条件とし, 動的解析を時刻 Δt の時間1ステップだけ行い, 解析の結果得られる応力 σ とひずみ ε の分布から, 蓄えられたひずみエネルギー \bar{U}_{impact} を式(1)により算出する。

$$\bar{U}_{\text{impact}} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (1)$$

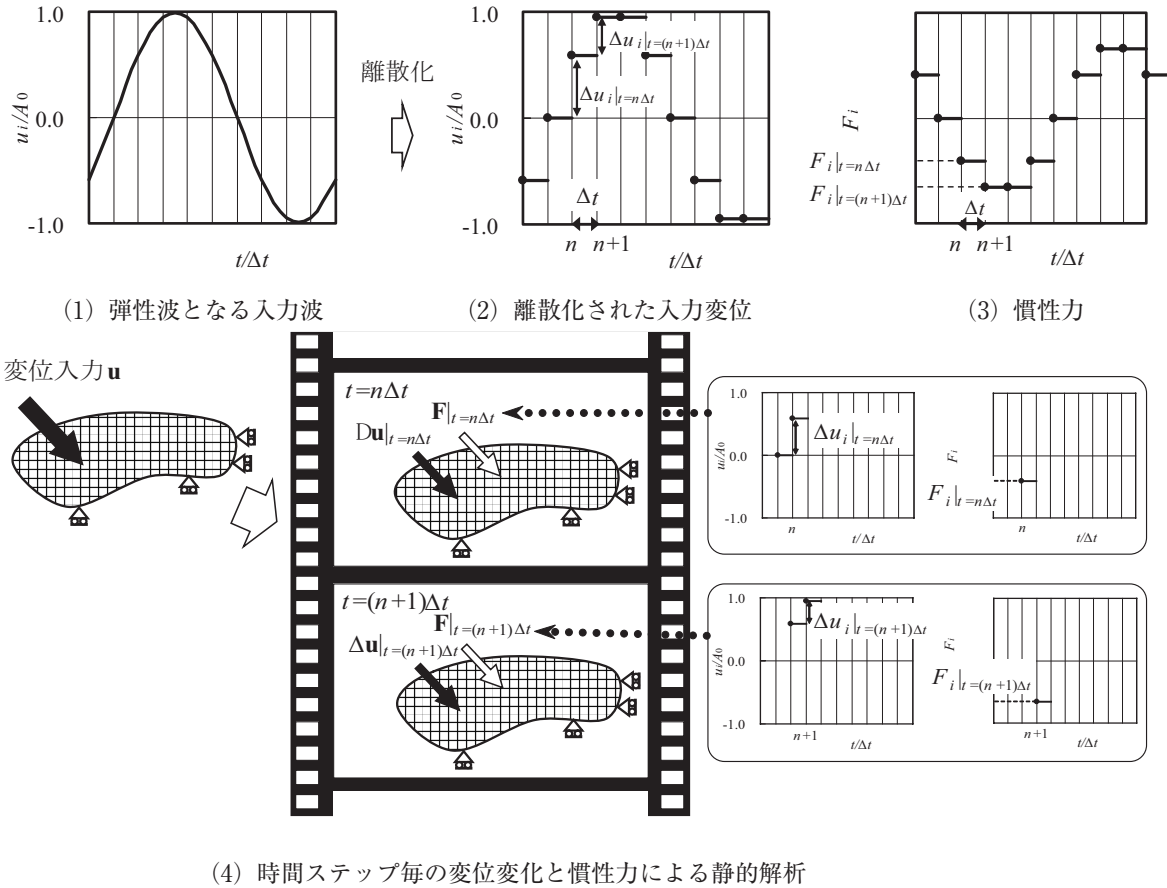


図1 弾性波伝播問題

Step5 要素細分化前の \bar{U}_{impact} と今回の要素細分化後の \bar{U}_{impact} を比較し、工学的に \bar{U}_{impact} が収束していないと判断すれば Step3 以降を繰り返し、収束していると判断すれば要素細分化を打ち切る。

3. 適用例

弾性波の一つである鋼材中の超音波の伝播問題への IM 法の適用を検討した。

図3に、検討した平鋼板表面上の探触子から超音波を入射する3次元超音波伝播問題を示す。

寸法 $L=2.0 \times 10^{-2}\text{m}$, $W=2.0 \times 10^{-2}\text{m}$, $H=2.0 \times 10^{-3}\text{m}$ の静止状態にある鋼板において、その表面上に配置する探触子寸法 $L_i=5.0 \times 10^{-3}\text{m}$, $W_i=5.0 \times 10^{-3}\text{mm}$ の範囲が一様に時刻 $t>0$ に変位 $\mathbf{u}(t)$ を与えることにより加振されるとした。加振入力条件を表1に材料定数を表2に示す。

図3の問題を図4のようにモデル化し、有限要素解析を行う。対称性を考慮し、 $y=0$ の1/2領域を考

え、8節点六面体要素を用いて、 x, y, z 方向の寸法をそれぞれ n_L, n_W, n_H に等分割した。

時間増分 Δt は、図5に示すように、正弦波を離散化したとき、正弦波の振幅値が誤差5%以内で再現可能な分割数となるように、加振入力変位の周期 T の1/10とした。

この問題に対し、IM法を適用し、適切な要素分割を選定する。図2のStep4は、具体的には初期条件を

$$\mathbf{u}(0)=0 \tag{2}$$

とし、 x, y, z 方向の節点変位 u_i, v_i, w_i により、次の境界条件

$$\begin{aligned} u_i(<L/4, <W/8, 0; \Delta t) &= \Delta u_{\text{impact}} \\ u_i(L, W/2, 0; \Delta t) &= 0, u_i(L, W/2, H; \Delta t) = 0 \\ v_i(x, 0, z; \Delta t) &= 0 \\ w_i(<L/4, <W/8, 0; \Delta t) &= \Delta u_{\text{impact}} \\ w_i(0, W/2, H; \Delta t) &= 0, w_i(L, W/2, H; \Delta t) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

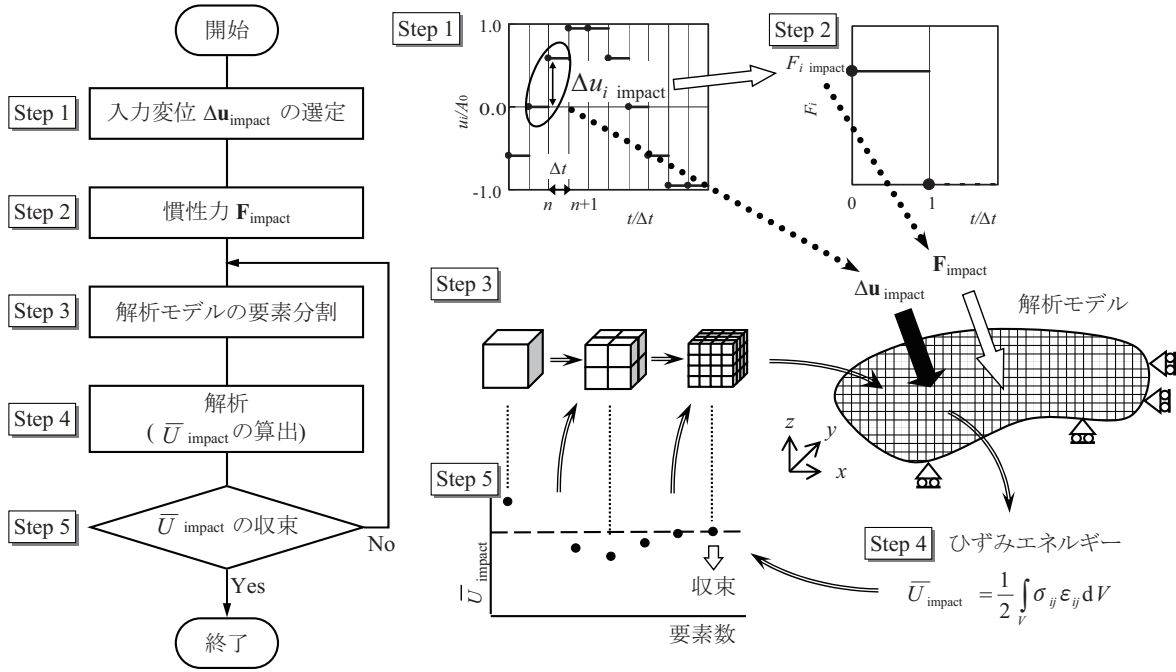


図2 IM法による要素分割選定の手順

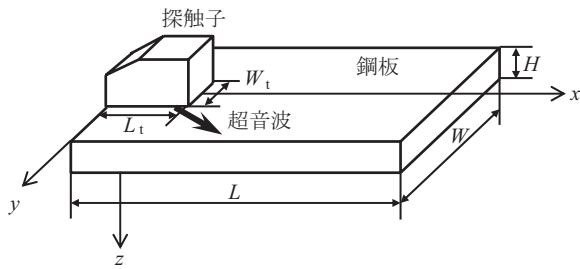


図3 3次元超音波伝播問題

表1 加振入力条件

波形	正弦波
周波数 f	$1.0 \times 10^6 \text{Hz}$
振幅 A_0	$1.0 \times 10^{-11} \text{m}$

表2 材料定数

ヤング率 E	206GPa
ポアソン比 ν	0.3
密度 ρ	7700kg/m ³

を与え、 $t=0 \sim \Delta t$ のみの動的解析を行った。解析は、汎用構造解析コード MSC Marc を用いて陰解法 (Houbolt 法) により行った。

この $t=\Delta t$ における解析結果を、以下 IM 解析結果と称する。その時のひずみエネルギー \bar{U}_{impact} を、

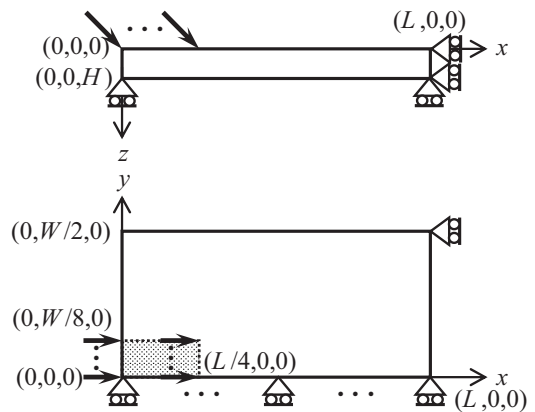


図4 解析モデル (3次元超音波伝播解析)

表3に示す要素数の異なる5種類の解析モデルについて求めた。表3に示す5種類の解析モデルによるIM解析結果から、ひずみエネルギー \bar{U}_{impact} の収束状況を図6に示す。図中、 $\bar{U}_{\text{impact } V}$ は表3のモデルVに対する値であり、モデルⅢが0.9772、モデルⅣが0.9996であった。モデルⅣからVに要素数を増加させたときの、ひずみエネルギーの変化は0.04%であり、収束していると判断した。

次に、本来解くべき図4に示す正弦波を入力する時刻歴解析を解析モデルⅠ～Ⅴの5ケースに対して行った。表3に示した5種類の要素数の異なる解析

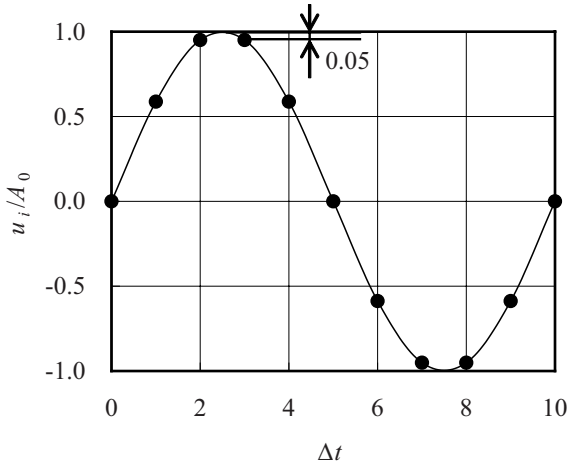


図5 時間増分の選定

モデルによる解析結果として、図7にひずみエネルギーの時刻歴変化を、図8に観測点 $(L, 0, 0)$ における各種計算値についての時刻歴変化を示す。図7および図8において、横軸は入力変位の周期 T により規格化した時刻である。また、 Δt 毎のひずみエネルギーおよび各種計算値を直線で結んで示している。

図7に示した時間 100 ステップまでのひずみエネルギーの時刻歴変化において、モデルIVとモデルVのひずみエネルギーの差は2%以内であった。IM法によって評価した時刻 Δt だけでなく、それ以降の時刻においてもモデルIVとモデルVの結果の差は小さく、モデルVにおいて収束していると言える。

図8には、観測点 $(L, 0, 0)$ における計算値のうち、加振入力の変位方向である x および z 方向に関係するものとして、変位 u, w 、体積ひずみ ϵ_v 、せん断ひずみ γ_{zx} 、回転 ω_y を示している。

これらの計算値について、IM法によりひずみエネルギーが収束したと判断したモデルVに対するモデルIIIおよびモデルIVの誤差を評価した。表4に、観測点 $(L, 0, 0)$ において弾性波の伝播に相当する変位 u, w 、回転 ω_y のピーク値における誤差を示す。IM法による評価においてひずみエネルギーが収束しているモデルIVとモデルVの値はよく一致した結果が得られていると言える。

以上から、IM法による解析モデルの要素分割選定が、実際の時刻歴解析においても適切であることが示された。

表3 解析モデル (3次元超音波伝播解析)

モデル	I	II	III	IV	V
n_L	8	20	40	80	120
n_w	4	12	20	40	60
n_H	1	2	4	8	12
要素数	32	480	3 200	25 600	86 400
要素寸法(mm)	2.5	1.0	0.5	0.25	0.17

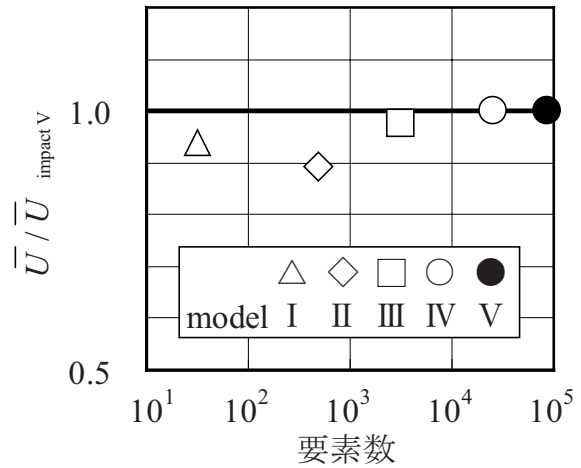


図6 ひずみエネルギーの収束 (3次元超音波伝播解析)

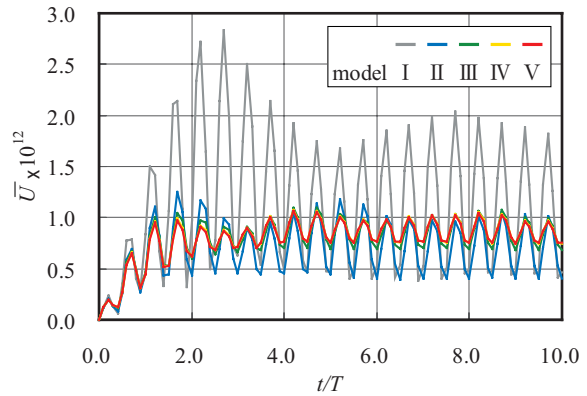
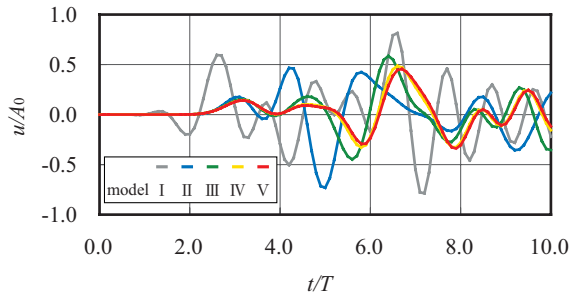


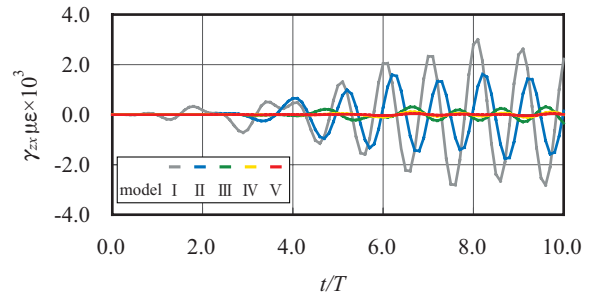
図7 ひずみエネルギーの時系列解析結果 (3次元超音波伝播解析)

4. 考察

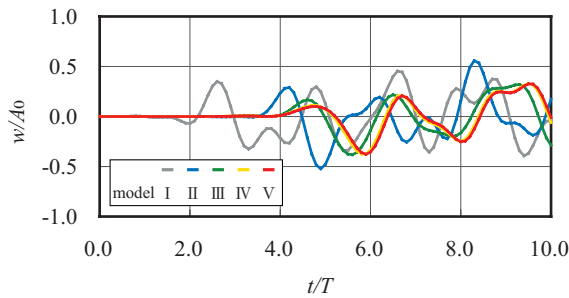
IM法の最も優れていると考えられる点は、従来のような解析モデルの要素細分化に際し、要素分割の異なる解析モデルの時系列解析を繰り返し実施し、その結果を比較して解の収束を判定するという手順が不要となり、要素分割の異なる解析モデルについて時間1ステップのみの解析で済むことである。



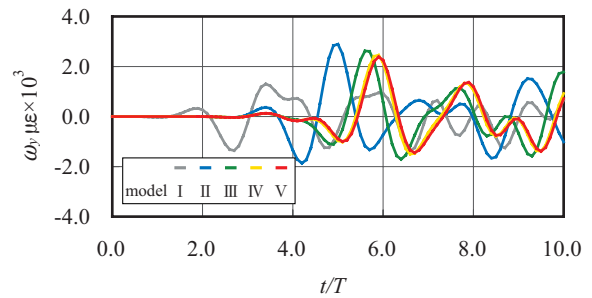
(1) 変位 u



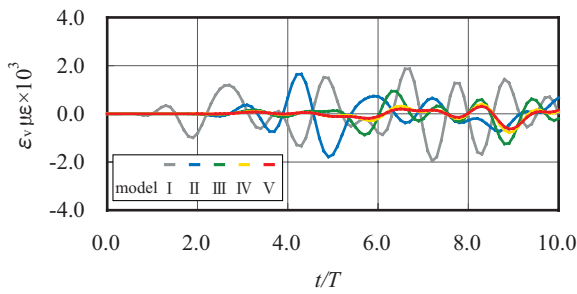
(4) せん断ひずみ γ_{zx}



(2) 変位 w



(5) 回転 ω_y



(3) 体積ひずみ ϵ_v

図8 弾性波に係る計算値の時系列解析結果 (3次元超音波伝播解析)

表4 解析モデルによる計算値の誤差 (3次元超音波伝播解析)

モデル	III	IV	V
変位 u	0.503-0.758	1.034-1.042	1.000
変位 w	0.615-0.775	0.993-1.020	1.000
回転 ω_y	0.118-0.619	0.936-1.026	1.000

表5 要素分割選定のためのCPU 計算時間

(Unit : s)

モデル	I	II	III	IV	V
従来方法	1.1	9.1	61.4	503.1	1 928.4
IM 法	0.1	0.3	2.3	82.5	368.4

表5に、要素分割を選定するために、時系列解析による方法とIM法とによる計算時間の比較を示す。3項で適用例として示した3次元超音波伝播解析における、表3の5つの解析モデルについての、時間100ステップの時系列解析の計算時間とIM法すなわち時間1ステップの計算時間を示している。従来の時系列解析結果による選定方法の約1/6の計算時間で選定が可能であった。

さらに大きな領域を対象とし、超音波の入射位置から伝播させる目的とする位置までの距離が長くなるような伝播問題を解析する場合には、超音波の伝播時間が長くなることによって時間ステップ数も増大する。このような場合には、IM法の適用がさらに有効であると考えられる。

また、図6で示したひずみエネルギーのモデルIVからモデルVへの変化は、0.04%に対して、表4に示した計算値のモデルIVからモデルVへの変化は、0.02-0.07%であった。ひずみエネルギーの変化から計算値の誤差の推定が可能なことを示唆するものであるが、今後さらなる解析事例によるデータの蓄積が望ましい。

5. おわりに

弾性波伝播有限要素解析において適正な解を与えるための、適切に要素分割された解析モデルを選定するための方法である IM 法を考案し、鋼材における超音波伝播問題への適用性を示した。

IM 法の特徴は以下のとおりである。

- (1) 要素分割により変化する解析モデル全体のひずみエネルギーに着目し、その収束によって要素分割を選定する。
- (2) 時間とともに変化する加振入力変位のうち、離散化した時間ステップにおいて最大に変化する変位とこれにより生じる慣性力を境界条件として入力する静的解析（時間 1 ステップのみの動的解析に相当）を行う。

このことから、IM 法の優れている点が、以下のとおり挙げられる。

- (1) 解析モデル全体のひずみエネルギーを評価するため、解析モデルの大きさ、加振入力点および弾性波観測点の位置、弾性波の伝播時間にかかわらず適用可能である。
- (2) 異なる要素分割の解析モデルについての時系列解析による解の収束評価が不要であり、これに伴って要素分割選定のための解析時間の短縮が可能である。

ひずみエネルギーの収束判定時の変化量によって、解析結果である弾性波に係る計算値の変化量が推定できれば、IM 法はより有益なものになると考えられる。今後さらなる解析事例によるデータの蓄積が望ましい。

文献

- (1) 劉銘崇, 三木千尋, “シャープな欠陥からの超音波端部エコーの発生挙動とその特性,” 土木学会論文集, 525 [I-33], 109-116 (1995).
- (2) 大槻明, 春海佳三郎, “地震時の大規模地下空洞周辺の波動伝播機構,” 土木学会論文報告集, 339, 227-230 (1983).
- (3) K. M. A. Jaleel, N. N. Kishore, V. Sundararajan, “Finite-element simulation of elastic wave propagation in orthotropic composite materials,” *Materials Evaluation*, 51 [7], 830-838 (1993).
- (4) 伊藤智啓, 川嶋紘一郎, 森貴一郎, 表竜二,

“線集束超音波探触子により励起された漏洩表面波伝播の有限要素法解析,” 日本機械学会論文集. A 編, 65 [631], 589-596 (1999).

- (5) 林山, 伊藤智啓, 川嶋紘一郎, “薄肉円管周方向の波動伝搬の FEM 解析と軸方向溝状欠陥の寸法同定,” 日本機械学会論文集. A 編, 67 [653], 36-42 (2001).
- (6) S. H. Ju, Y. M. Wang, “Time-dependent absorbing boundary conditions for elastic wave propagation,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 [9], 2159-2174 (2001).
- (7) J. Zhang, D. J. Verschuur, “Elastic wave propagation in heterogeneous anisotropic media using the lumped finite-element method.,” *Geophysics*, 67 [2], 625-638 (2002).
- (8) K. Harumi, “Computer simulation of ultrasonics in a solid,” *NDT International*, 19 [5], 315-332 (1986).
- (9) 三木千寿, 高橋政則, 館石和雄, 劉銘崇, “超音波探傷の高精度定量化に関する研究 その 1. 超音波の数値シミュレーションとモード分離画像化について,” 東京工業大学土木工学科研究報告, 75-100 (1992).
- (10) J. Guan, Z. Shen, X. Ni, J. Lu, J. Wang, B. Xu, “Numerical simulation of the ultrasonic waves generated by ring-shaped laser illumination patterns,” *Optics & Laser Technology*, 39 [6], 1281-1287 (2007).
- (11) A. Galdos, H. Okuda, G. Yagawa, “Finite element simulation of ultrasonic wave propagation in pipe and pressure vessel walls.,” *Finite Element Analysis and design*, 7 [1], 1-13 (1990).
- (12) F. Moser, L. J. Jacobs, J. Qu, “Application of finite element methods to study transient wave propagation in elastic wave guides,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, 17, 161-167 (1998).
- (13) K. Mirkhani, C. Chaggares, C. Masterson, M. Jastrzebski, T. Dusatko, A. Sinclair, R. J. Shapoorabadi, A. Konrad, M. Papini, “Optimal design of EMAT transmitters,” *NDT & E International*, 37 [3], 181-193

- (2004).
- (14) 吉川孝男, 前田正広, 岸田和人, 中村栄隆, 前田修平, “数値シミュレーションを用いた超音波伝播挙動の可視化研究,” 西部造船会 110 回例会論文梗概, 119-125 (2005).
- (15) A. K. Nair, P. R. Heyliger, “Elastic waves in combinatorial material libraries,” *Wave Motion*, 43 [7], 529-543 (2006).